T-formula のルーツとファジィ積分の計算法
— Calculation Methods of Fuzzy Integrals with the Root of T-formula —

塚本弥八郎
Yahachiro Tsukamoto
名城大学名誉教授
Professor Emeritus, Meijo University

Abstract: This article presents the Lovasz extension related to the Choquet integral, which will clarify the root of the T-formula proposed by the author. Furthermore we try to apply this formula to the Sugeno integral and general fuzzy integrals based on copula.

1 はじめに

本稿では, まず Lovasz 拡張について述べ, T-formula のルーツがどこにあるのかを明らかにする.

先回の研究 (塚本 [9]) で,「ショケ積分の T-formula による表現」について報告したが, さらに. 菅野積分および copula に基づくファジィ積分の T-formula による表現と簡単計算を示す.

本稿の構成は以下の通りである.

第 1 章: 本稿で用いる記号とファジィ測度の定義,

第 2 章: $\mathbf{x} \in (R^+)^n$ の T-formula による表し方,

第 3 章: Lovasz 拡張に基づくファジィ積分の表現,

第 4 章: T-formula によるショケ積分, 菅野積分および copula に基づくファジィ積分の表現と計算法,

第 5 章: 結び.

2 準 備

(左辺) := (右辺)
を (左辺) は (右辺) により定義されると読む.

以下の記号を定める. $\vee$, $\wedge$ は順に max, min を, $B \setminus A$ は差集合, $|A|$ は集合 A の基数を表す.

非負の実数の集合を次のように表す.
$R^+ := [0, \infty)$
$f : X \to R^+$ について, $\alpha \in R^+$ として, 次のような集合を表す簡略記号を用いる.

$$\{f \geq \alpha\} := \{x : f(x) \geq \alpha\}.$$

集合関数 $v : 2^X \to R^+$ についても次のように表す.
$v(f \geq \alpha) := v(\{x : f(x) \geq \alpha\})$.

$y \in R$ について次の記号を頻繁に使用する.
$y^+ := y \vee 0,$
$y^{++} :=$ if $y > 0$ then 1 else 0.

定義 1: ファジィ測度

$N = \{1, \ldots, n\}$ とする.

$v : 2^N \to R^+$ が次の 3 条件を満たすとき, v をファジィ測度と呼ぶ.

1. $v(\emptyset) = 0$
2. $v(N) > 0$
3. $\forall A, B \in 2^N,\ v(A \cup B) \geq v(A) \vee v(B)$.

加法的測度, μ, は次式で特徴づけられる.
$\forall A, B \in 2^N,\ A \cap B = \emptyset \to \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

$v(N) = 1$ とする場合にはこれを明記する.

3 $\mathbf{x} \in (R^+)^n$ の表し方

n 次元実数空間の点は n 個の正規直交基底ベクトルを用いて表すことができるが, 別の基底ベクトルを導入することによっても可能である.

R で実数, $(R^+)^n$ で n 次元非負実数空間とする.

3.1 正規直交基底ベクトルによる表現

$\mathbf{x} \in (R^+)^n$ は次式のように表される,

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i. \tag{1}$$

たとえば, 3 次元の場合, 正規直交基底ベクトル
$\mathbf{e}_1 := (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 := (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 := (0, 0, 1)$
を使うと, $\mathbf{x} \in (R^+)^3$ は次式で表すことができる,

$$(x_1, x_2, x_3) = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3.$$

3.2 別の基底による表現

$N := \{1, 2, \ldots, n\}, \quad g : N \to R^+,$
$S_1 \subset \ldots \subset S_k \subseteq N, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0, \quad (k \leq n),$
と定めると, n 元ベクトルで表される点, $\mathbf{x} \in (R^+)^n$ を次式で表すことができる,

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{e}_{S_i}. \qquad (2)$$

ただし, $\mathbf{e}_{S_i}$ は S_i の特性関数のとるバイナリーな値であり, それぞれに対応する部分集合は入れ子構造になっていることに注意する.[1]

例 1)
a) $(1, 5, 3) = 2\ (0, 1, 0) + 2\,(0, 1, 1) + (1, 1, 1)$
b) $(0, 5, 3) = 2\ (0, 1, 0) + 3\ (0, 1, 1) \quad (n = 3, k = 2)$
c) $(3, 2) = (1, 0) + 2\ (1, 1) \quad (n = k = 2).$

例 2) $N = \{1, 2, 3\}, \quad x_i \in R^+, (i = 1, 2, 3)$
について, $0 \leq x_3 \leq x_2 \leq x_1$ とすると, $\mathbf{x} \in (R^+)^3$ は

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)\mathbf{e}_{S_1} + (x_2 - x_3)\mathbf{e}_{S_2} + x_3\mathbf{e}_{S_3}$$

と書き表すことができる. (2) 式の係数は,
$\lambda_1 = x_1 - x_2, \quad \lambda_2 = x_2 - x_3, \quad \lambda_3 = x_3.$
用いた基底は,
$\mathbf{e}_{S_1} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{e}_{S_2} = (1, 1, 0), \quad \mathbf{e}_{S_3} = (1, 1, 1)$
で, $S_1 \subset S_2 \subset S_3$ を満たしている.

3.3 置換の数だけある $(R^+)^n$ の分割

$x_{\pi(i)}$ で N 上の置換を表す.

$$\mathcal{B}_\pi := \{\mathbf{x} \in [0, 1]^n \;\Big|\; x_{\pi(1)} \geq x_{\pi(2)}, \ldots, \geq x_{\pi(n)})$$

と定義し, このような置換のすべてからなる集合を Π_n で表す. $\pi \in \Pi_n$ と書くと, π は $n!$ 通りあり, この順列の数だけ $[0, 1]^n$ を分割する. 分割された各領域は $(n + 1)$ 個の頂点をもつ.

さらに,

$$\mathcal{K}_\pi := \{\lambda\mathcal{B}_\pi | \lambda \geq 0\}$$

は n 次元非負実数空間を $n!$ 個に分割する.

例 1-a) では, 000, 010, 011, 111 の 4 点を頂点とする三角錐, $\mathcal{B}_\pi$, の拡張として形成される $\mathcal{K}_\pi$ の内点として $\mathbf{x} \in (R^+)^3$ を表すことができる.

[1]本稿では戦略的に, $f(\mathbf{0}) = 0$, または, $f(\emptyset) = 0$ とし, 零ベクトルもありとしている.

3.4 本節のここまでのまとめ

1) n 次元 hyper-cube, $[0, 1]^n$, の端点の数は 2^n 個あり, N 点集合の部分集合に対応している.

2) **0** 点を始点とし, $[0, 1]^n$ の端点を終点とするベクトルの数は $(2^n - 1)$ 個あり, これらすべてが基底の候補となる.

3) ある置換 $\pi \in \Pi_n$ について, $k \leq n$ 個の基底ベクトルが選出され, K_π で表される *k-dimensional hyper-cube* を形成する $(k \leq n)$.

4) 正規直交基底の数は n 個で, これに比べて, $(2^n - 1)$ 個は大きいが, 実際に用いる基底ベクトルの数は $k \leq n$ 個となっている.

3.5 T-formula による $\mathbf{x} \in (R^+)^n$ の表現

$\forall A \subseteq N$ について,

$$\lambda_A := (\bigwedge_{i \in A} x_i - \bigvee_{j \in A^c} x_j)^+ \qquad (3)$$

(2) 式の T-formula による表現は次式となる.

$$\mathbf{x} = \sum_{A \subseteq N} \lambda_A \mathbf{e}_{S_A}. \qquad (4)$$

本稿で言う T-formula とは上の (4) 式を指している.

例 3) 前出の (**例 1**-c) ,
$(3, 2) = (1, 0) + 2\ (1, 1) \quad (n = k = 2),$
について考える. (3) 式と (4) 式より,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \sum_{A \subseteq N} \lambda_A \mathbf{e}_{S_A} \\ &= (x_1 - x_2)^+\mathbf{e}_{10} + (x_2 - x_1)^+\mathbf{e}_{01} + (x_1 \wedge x_2)\mathbf{e}_{11}. \end{aligned}$$

$x_1 = 3,\ x_2 = 2$ より, $(3, 2) = (1, 0) + 2\ (1, 1).$

ここで使用された基底ベクトルは $(1, 0),\ (1, 1)$ である.

このことから, T-formula のルーツは $\mathbf{x} \in (R^+)^n$ の表し方にあったと言える.

3.6 Database 関数による表現

(4) 式による表現では, すべての N の部分集合について考慮するので計算量を考慮すると, 入れ子構造を

表 1: T-formula による $\mathbf{x} \in (R^+)^2$ の計算

	A	B	C	D	E	F
1	N	x	{ a}	{ b}	{ a,b}	Subsys.
2	a	3	in	notin	in	
3	b	2	notin	in	in	**DB**
4						
5			{ a}	{ b}	{ a,b}	Subsys.
6			in	in	in	belong
7			3	2	2	**DMIN**
8						
9			Sub1	Sub2	Sub3	Subsys.
10			notin	notin	notin	notbelong
11			2	3	0	**DMAX**
12			1	0	2	$\lambda_\mathbf{A}$
13		x	(1,0)	(0,1)	2(1,1)	$x = (3, 2)$

もつ部分集合だけを考える方法より冗長に思える．ただし, 通常の表計算ソフトで使用可能な Database 関数により, 必要な基底を抽出しショケ積分値を得ることができる．本稿では, $N = \{a, b\}$ について λ で表現される基底ベクトルの T-formula による計算過程を表 1 に示す.

$\lambda_A = 0$ に対応する部分集合は基底の構築から削除される.

4　Lovasz 拡張に基づく積分の表現

Lovasz 拡張とは, *non-Boolian function* と呼ばれている関数　$f : \{0, 1\}^n \to R$ の定義域を $(R^+)^n$ へと拡張することをいう．この拡張された関数を $\hat{f}$ で表す.
$\hat{f} : (R^+)^n \to R$.
(2) 式より,

$$\begin{aligned}\hat{f} &= \hat{f}\Big(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(\mathbf{e}_{S_i})\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(\mathbf{e}_{S_i}) \qquad (5)\end{aligned}$$

ただし, $f(\mathbf{e}_{S_i}) \in (R^+)^n, (i = 1, \ldots, k), \quad (k \leq n)$.

この Lovasz の拡張 (5) 式は,
$\mathbf{x} \in (R^+)^n$ について,

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_{\pi(i)} \Big(f(\mathbf{e}_{\{\pi(i),\ldots,\pi(n)\}}) - f(\mathbf{e}_{\{\pi(i+1),\ldots,\pi(n)\}})\Big). \qquad (6)$$

さらに, (6) 式は,

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} (x_{\pi(i)} - x_{\pi(i+1)}) f(\mathbf{e}_{S_i}) \qquad (7)$$

のように書き表すことができる.

$\hat{f}$ を総合評価値, $f(\cdot)$ を集合関数, すなわち, ファジィ測度とみなすと, (7) 式はショケ積分に他ならない. (7) 式において, f を集合関数として見ると, T-formula によるショケ積分の別表現 [9] の根っ子は, *Lovasz extension* の表現の中にあると理解される.

例題　(7) 式に基づいて簡単な工程表の数式モデルを示す.
$N = \{a, b\}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ とおく.
(6) 式における, $f(e_{\{\pi(i),\ldots,\pi(n)\}})$ などは基底ベクトルの端点における f である.
ここで出現する変数等に意味を付与する.

a(b) : A 一郎 (B 子)

$x_1(x_2)$: A 一郎 (B 子) の就業時間

$f(10)$: A 一郎が一人で作業するときの生産性

$f(01)$: B 子が一人で作業するときの生産性

$f(11)$: A 一郎と B 子の協働作業の生産性

$\hat{f}$: 総生産個数

上記でいう生産性の単位は（[個数]/[時間]）.
表 1 の B 列の場合, $x_1 = 3$ 時間,　$x_2 = 2$ 時間で, このうち 2 時間は協働作業とすると, (7) 式は以下のようになる.

$$\begin{aligned}\hat{f}(\mathbf{x}) &= (x_1 - x_2) f(10) + x_2 f(11) \\ &= (3 - 2) f(10) + 2 f(11)\end{aligned}$$

$f(10)$, すなわち A 一郎が一人で作業するときの生産性を 60 [個数]/[時間], また, $f(11)$, すなわち A 一郎と B 子の協働作業のときの生産性を 200 [個数]/[時間] と仮定すると, 生産量の合計 $(\hat{f}) = 460$ 個になる.

5　T-formula によるファジィ積分の計算

5.1　ショケ積分

(7) 式で表されたショケ積分を原定義に近い形式で書き直す. $f_i, \quad (i = 1 \ldots, n)$ は降順で与えられているとし, かつ $f_{n+1} = 0$ とする.

$$(c) \int f \circ dv := \sum_{i=1}^{n} (f_i - f_{i+1})\, v(f \geq f_i) \qquad (8)$$

(8) 式のショケ積分の T-formula による別表現は次式となる　ただし, 次式では f_i の順序については任意でよいことに注意する.

$$T_v(f) = \sum_{A \subseteq N} \Big(\bigwedge_{i \in A} f(i) - \bigvee_{i \notin A} f(i) \Big)^+ v(A) \qquad (9)$$

(8) 式と (9) 式が等しいことは文献 (塚本 [9]) にあり, 本稿では割愛し, 具体的な計算法を表 2. に示す.
表 2. について若干の説明する.

$\forall A \subseteq X$ について, 特性関数 $1_A : N \to \{0,\ 1\}$ を次のように言語的表現を用いて表す.

$$1_A(x) := \begin{cases} \text{"in"} & \text{if } x \in A \\ \text{"notin"} & \text{else} \end{cases}$$

簡単な計算手法として, 身近にある Excel 2007 のデータベース関数を使用する. データベース関数 " $= DMIN(DMAX)$" は DB の領域, 関数値 (f), および検索条件の範囲を指定することにより, 検索条件を満たす中での f の最小値 (最大値) を返す命令である.

簡単のため２要素の場合 $X = \{a, b\}$ について表１に基づいて詳述する. ２つの要素は名前や背番号など名義尺度のままで良い. 表１の第１行に３つの部分集合を $\{a\}, \{b\}, \{a, b\}$ の は順に書く. F 列は F14 を除いて備考欄として使用している. データベース領域（以下, DB と呼ぶ）の第１行は関数の名称 f と３つの部分集合の名称からなる. 第 B 列には, f の値を, 第 2, 3 行の C,D,E 列には対応する要素が各部分集合に属すれば "in", 属さなければ "notin"と書く. 以上の (B1:E3) の３行４列を DB として定義する.

検索条件１は (C6:E7) の 2 行 3 列で, ７行目のすべての列に "in" と書かれたもの, および, 検索条件２として, (C10:E11) の 11 行目のすべての列に"notin" と書かれたものを作成しておく.

$DMIN$ の計算に当って, 最初の検索条件１で実行すれば, 各部分集合に属するものの中での f の最小値を, $DMAX$ の計算を検索条件２で実行すれば, 各部分集合に属さないものの中での f の最大値を得る. 13 行の C,D,E 列は, (**??**) 式に示した $h(A)$ の計算結果で, 最後にすべての部分集合について $h(A)$ の和を以て, T-formula の計算終了である.

表１における C8, C13, F14 のセル情報を示す.

C8 : $= DMIN(\$B\$1 : \$E\$3, "f", C\$6 : C\$7)$,

C13 : $= MAX(C\$8 - C\$12, 0)$,

F14 : $= SUM(C14 : E14)$.

表 2: T-formula によるショケ積分の簡単計算

	A	B	C	D	E	F
1		f	{ a}	{ b}	{ a,b}	Subset
2	a	30	in	notin	in	
3	b	12	notin	in	in	**DB**
4			100	60	200	Capacity
5						
6			{ a}	{ b}	{ a,b}	
7			in	in	in	検索条件１
8			30	12	12	**DMIN**
9						
10			{ a}	{ b}	{ a,b}	
11			notin	notin	notin	検索条件２
12			12	30	0	**DMAX**
13			18	0	12	h(A)
14			1800	0	2400	4200

5.2 菅野積分

集合関数 $h : 2^N \to R^+$ を次式で定義する.

$$h(A) := \sum_{A:|A|=k} \Big(\bigwedge_{i \in A} f(i) - \bigvee_{i \notin A} f(i) \Big)^+ . \qquad (10)$$

$h(A)$ は $\Big($Card(A) 番目に大きい $f\Big)$ と $\Big($その次に大きい $f\Big)$ との差を意味している. f が昇順あるいは降順あるいはランダムな順序で与えられていたとしても, $h(A)$= **($|A|$ 番目に大きい f) - (その次に大きい f)** になっている.

被積分関数については, $1 \geq a_1 > a_2 > \ldots > a_n \geq 0$, ファジィ測度については, $\mu_1 < \mu_2 < \quad \ldots < \mu_n = 1$
とおくと, 菅野積分は次式で定義される.

$$(s) \int f \circ dv = \bigvee_{i=1}^{n} \Big(a_i \wedge \mu_i \Big) \qquad (11)$$

ただし, $\mu_i = v(f \geq a_i)$.

(11) 式を T-formula で表現することを考える.

ある部分集合 $A \subseteq N$ が与えると, $|A| = k$ が決まり, $\{A : |A| = k\}$ が作られる.
${}_nC_k$ の A で (10) 式の $h(A)$ の計算過程で生き残るのはただ一つの A であり, これを A^* で表す. ただし, $(a_i = a_{i+1})$ のときは一つも残らない.

$$h^*(A) := \sum_{A:|A|=k} \Big(\bigwedge_{i \in A} f(i) - \bigvee_{i \notin A} f(i) \Big)^{++} DMIN(A^*). \qquad (12)$$

$$h^{**}(A) := \Big(\bigwedge_{i\in A} f(i) - \bigvee_{i\notin A} f(i)\Big)^{++} DMAX(A^*). \tag{13}$$

(12) 式における $DMIN(A^*)$ は (10) 式の計算過程ですでに得ている $\bigwedge_{i\in A^*} f(i)$ を, (13) 式における $DMMX(A^*)$ は $\bigvee_{i\notin A^*} f(i)$ を意味する.

$|A| = k$ のとき $h^*(A)$ は k 番目に大きい f, ただし $(1 \le k \le n)$, $h^{**}(A)$ は $(k+1)$ 番目に大きい f, ただし, $(1 \le k \le (n-1))$ となっている.

なお, $h^{**}(A)$ の方は次節で使用する.

以上の準備を俟って, 菅野積分の T-formula による表現は次式となる.

$$(s)\int f \circ dv = \bigvee_{A\subseteq N} \Big(h^*(A) \wedge v(A)\Big). \tag{14}$$

5.3 copula に基づくファジィ積分

copula とは 3 つの条件[2]を満たす 2 変数関数

$$C : [0,1]^2 \to [0,1]$$

を指す. (M.J.Frank[4],H.Imaoka[8]).
本稿では, C が Duality Condition [3] を満たすような copula のみを扱い, $C(x,y) = x \circ y$ で表す.

本節では, H.Imaoka[8] が用いた記号にしたがう.
$f(x_{(i)}) := a_i, (i = 1,\dots,n)$ については前節とは逆に
$0 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le 1$ のように昇順,
ファジィ測度は $1 = \mu_1 \ge \mu_2 \ge \cdots, \ge \mu_n$
のように降順で与えられているとする.

ファジィ積分は copula の記号を用いて以下のように表す (Imaoka [8]),

$$(a_1\circ\mu_1)+(a_2\circ\mu_2)-(a_1\circ\mu_2)+\cdots+(a_n\circ\mu_n)-(a_{n-1}\circ\mu_n).$$

この積分値を (g) の記号で表す.

$$(g) = \sum_{i=1}^{n}(a_i \circ \mu_i) - \sum_{i=1}^{n-1}(a_i \circ \mu_{i+1}). \tag{15}$$

---

[2]

1) $C(0,x) = C(x,0) = 0,$
2) $C(1,x) = C(x,1) = x,$
3) $a \le b, c \le d \to$
$C(b,d) - C(a,b) - C(b,c) + C(a,c) \ge 0.$

[3] $C(x,y) + 1 - C(1-x, 1-y) = x + y.$

命題 1 T-formula を使った copula に基づくファジィ積分の表現は次式となる.

$$(g) = \sum_{A\subseteq N} \Big((h^*(A) \circ v(A)) - (h^{**}(A) \circ v(A))\Big). \tag{16}$$

証明
(15) 式の第 1 項の和について,

$$\begin{aligned}
\sum_{A\subseteq N} h^*(A) \circ v(A) &= \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{A:|A|=k}(h^*(A)\circ\mu_k)\Big)\\
&= \sum_{k=1}^{n}(a_{n-k+1} \circ v(f \ge a_{n-k+1})\\
&= \sum_{i=1}^{n}(a_i \circ \mu_i) \qquad (17)
\end{aligned}$$

(15) 式の第 2 項について,

$$\begin{aligned}
\sum_{A\subseteq N}(h^{**}(A)\circ v(A)) &= \sum_{k=1}^{n-1}\Big(\sum_{A:|A|=k}(h^{**}(A)\circ\mu_{k+1})\Big)\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k} \circ v(f \ge a_{n-k+1})\\
&= \sum_{i=1}^{n-1}(a_i \circ \mu_{i+1}). \qquad (18)
\end{aligned}$$

上述の展開で, h^{**} は $1 \le k \le (n-1)$ の範囲で定義されていることに注意する.

6 結び

T-formula のルーツを探ると, $\mathbf{x} \in (R^+)^n$ の表し方にあった. 例題として, 通常の工程表に対して, ベクトルを使った数式モデルで工程表の明快な説明をした.

T-formula を使った Choquet 積分の表現に加えて, 菅野積分および copula に基づくファジィ積分の表現を示した. ただし, (15) 式についてはまだ検証不十分であることを付記する.

これらの積分の計算過程は一見より複雑になったように見えるが, 示された表 2. に数行加えることにより簡単計算が可能である.

T-formula の主張は与えられた被積分関数を無順序で計算システムの入力として扱えるという点にある.

本稿作成の現時点では予測にとどまるが, 今岡 [8] によれば, Duality condition を満たす copula から生成されるファジィ測度に基づくファジィ積分の例として

以下のものが知られている.
$C(x,y) = x \wedge y \ \rightarrow$ Sugeno integral,
$C(x,y) = x \cdot y \ \rightarrow$ Choquet integral,
$C(x,y) = (x+y-1)^+ \ \rightarrow$ Opposit Sugeno integral.

だとすると, (15) 式のみで上の 3 つの積分が計算できることになる. 今後の楽しい課題としておく.

参考文献

[1] 菅野道夫, 室伏俊明：講座ファジィ第３巻, ファジィ測度, 日本ファジィ学会編, 日刊工業新聞社, 1993

[2] 藤本勝成：「入門：ファジィ測度とその周辺, 第１回〜第４回」, 知能と情報, Vol.20, No.2, No.3, No.4, No.5, 2008

[3] 高萩栄一郎 :ファジィ積分計算 WEB http://www.isc.senshu-u.ac.jp/ thc0456/fuzzyweb.html

[4] M.J. Frank : On the simultaneous associativity of $F(x,y)$ and $x+y-F(x,y)$, *Aequ. Mathematics*, 19, pp.194-226, 1979

[5] Y.Tsukamoto : On density function of λ-fuzzy measure, *Proc. of Joint Congress on Applied System Research and Cybernetics*, Acapulco,1980

[6] Y.Tsukamoto : A Measure Theoretic Approach to Evaluation of Fuzzy Set Defined on Probability Space, *Journal of Fuzzy Mathematics*, Vol.3, pp.89-98, 1982

[7] Jean-Luk Marichal, On Choquet and Sugeno Integrals as Aggregation Functions, In : eds. by M.Grabish et.al. *Fuzzy Measures and Integrals:Theory and applications*, Physica-Verlag, pp.247-272, 2000

[8] Comparison between Three Fuzzy Integrals, In : eds. by M.Grabish et.al. *Fuzzy Measures and Integrals:Theory and applications*, Physica-Verlag, pp.273-286, 2000

[9] 塚本弥八郎：Choquet 積分の T-formula による簡単計算, 知能と情報, Vol.28, No.2, pp.583-587, 2016

[10] 藤本勝成, 成川康男：第 1 回菅野積分の栄枯盛衰, 知脳と情報（日本ファジィ学会誌）, Vol.28, No.3, pp.64-72, 2016

[11] 藤本勝成, 成川康男：第 2 回菅野積分の進化, 知脳と情報（日本ファジィ学会誌）, Vol.28, No.4, pp.98-106, 2016

連絡先

塚本弥八郎
E-mail: yytsukamoto@ac.auone-net.jp