複数のレベルをもつ階層図からのファジィ測度の同定
– 割当関数の利用 –

Fuzzy Measure Identification Methods for a Multi-level Hierarchy Diagram by Assignment Functions

○ 高萩　栄一郎 (Eiichiro Takahagi)
専修大学商学部 (School of Commerce, Senshu University)

Abstract: We propose fuzzy measure identification methods for a hierarchy diagram. A hierarchy diagram displays the multi-level hierarchical relationships among the evaluation criteria, weights, and interaction degrees for each hierarchical relationship. The degrees of interaction are different for each hierarchical relationship and are expressed by the fuzzy measure assignment functions. We present fuzzy measure identification methods by using the Ordered Weighted Average (OWA) operator and the λ fuzzy measure. A hierarchy diagram constructed with these parameters enables comprehensive fuzzy measures to be identified by the input number standard.

1　はじめに

本稿では，図 1 のような重要度，相互作用付きの階層図から全体のファジィ測度を求める方法を考察する．

2　定義など

$N = \{1,\dots,n\}$ を評価基準の集合，$w_i \geqq 0, \forall i, \sum w_i = 1$ を評価基準 i への重要度とする．

■ファジィ測度　ファジィ測度 $\mu : 2^N \to [0,1]$ は，

$$\mu(\emptyset) = 0,\ \mu(N) = 1 \quad (境界条件) \tag{1}$$
$$\mu(A) \leqq \mu(B) \quad \text{if } A \subseteq B \subseteq N \quad (単調性) \tag{2}$$

で定義され，互いに疎な A, B に対して $\mu(A \cup B) \geqq \mu(A) + \mu(B)$ を優加法的，$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ を加法的，$\mu(A \cup B) \leqq \mu(A) + \mu(B)$ を劣加法的と呼ぶ．すべての互いな疎な集合に対して成り立てば，優加法的，加法的，劣加法的なファジィ測度と呼ぶ．

■ショケ積分　$x_j \geqq 0, \boldsymbol{x} = (x_1,\dots,x_n)$ を j 番目の基準の評価値とする．ショケ積分は，次式で定義される．

$$f_\mu(\boldsymbol{x}) \equiv \sum_{i=1}^{n} [(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(i+1)})\mu(\{\sigma(1),\dots,\sigma(i)\})]$$

σ は x_i の置換 $(x_{\sigma(1)} \geqq \ldots \geqq x_{\sigma(n)})$ である．

■λ ファジィ測度 **[1]**　ある $\lambda > -1$ を与え，すべての互いな疎な集合 A, B に対して，

$$\mu(A \cup B) = a + b + \lambda ab \tag{3}$$
$$\mu(A) \in [0,1],\ \forall A \subseteq N \text{ and } \mu(N) = 1 \tag{4}$$

が成立するとき，この μ を λ ファジィ測度と呼ぶ．$0 > \lambda > -1$ ならば μ は劣加法的，$\lambda = 0$ ならば加法的，$\lambda > 0$ ならば優加法的なファジィ測度である．

■**Distorted Probability**　P を N 上の確率とし，P に関する非減少関数 g

$$\mu(A) = g(P(A))\ \forall A \subseteq N, \tag{5}$$

で与えられたファジィ測度 μ は Distorted Probability と呼ばれ，P は和が 1 となる評価項目の重要度として解釈される．

■ファジィ測度割当関数　Distorted Probability により強い制約を与えた連続関数 $g : [0,1] \to [0,1]$

$$g(p) > g(q) \text{ if } p > q \text{ (strictly increasing)} \tag{6}$$
$$g(0) = 0,\ g(1) = 1 \tag{7}$$

をファジィ測度割当関数と呼び，次式でファジィ測度を割り当てる．

$$\mu(A) = g(\sum_{i \in A} w_i),\ \forall A \subseteq N \tag{8}$$

■**OWA** オペレータ **[4]**　順位に対する重み $\boldsymbol{x}, p_i \in [0,1], i = 1,\dots,n$ とし，

$$f_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}) \equiv \sum_{i=1}^{n} p_i x_{\sigma(i)} \tag{9}$$

で定義される．任意の $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{x}$ 対して，

$$f_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}) = f_\mu(\boldsymbol{x}) \text{ where } \mu(A) = \sum_{i=1}^{|A|} p_i,\ \forall A \subseteq N$$

となり，ファジィ測度ショケ積分モデルで計算できる．

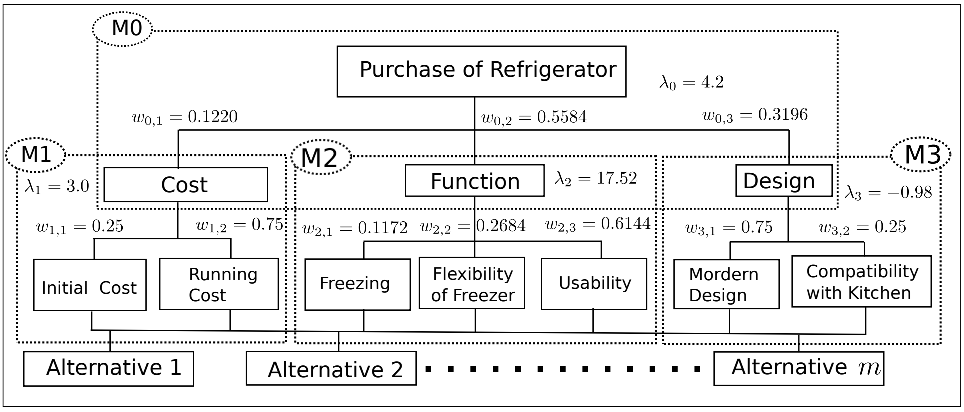

図 1 階層図の例

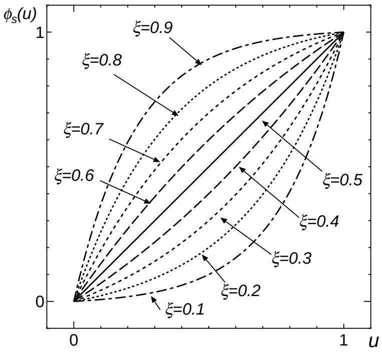

図 2 ϕ_s 変換

■ϕ_s 変換 **[5]** ϕ_s 変換は，λ ファジィ測度となるファジィ測度割当関数であり，$s > 0$ と $0 \leqq u \leqq 1$ に対して

$$\phi_s(u) = \begin{cases} u & \text{if } s = 1 \\ \dfrac{s^u - 1}{s - 1} & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{10}$$

で定義されている．任意の $\lambda > 0$ と $u_1, u_2 \in [0,1], u_1 + u_2 \leqq 1$，$s = \lambda + 1$ とすれば，

$$\phi_s(u_1 + u_2) = \phi_s(u_1) + \phi_s(u_2) + \lambda\phi_s(u_1)\phi_s(u_2)$$

である．また，逆関数は，

$$\phi_s^{-1}(v) = \begin{cases} v & \text{if } s = 1 \\ \log_s(1 + (s-1)v) & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{11}$$

となり，λ に 1 対 1 対応する相互作用の指標 ξ は

$$\xi \equiv \phi_s(0.5) = \begin{cases} 0.5 & \text{if } s = 1 \\ \dfrac{\sqrt{s} - 1}{s - 1} & \text{otherwise} \end{cases} \tag{12}$$

$$s = \frac{(1-\xi)^2}{\xi^2} \tag{13}$$

で定義される．ϕ_s 変換の形状は，図 2 のようになる．λ と ξ の解釈は，表 1 のように与えることができる．

表 1 λ, ξ と評価語

$\lambda(\xi)$	$\lambda > 0 (\xi < 0.5)$	$-1 < \lambda < 0 (\xi > 0.5)$
μ	優加法的	劣加法的
語	補完的	代替的
	バランス重視	個性重視
	慎重な	大胆な
	悲観的	楽観的
	保守的	進歩的
	短所がない	長所を重視
	確実性重視	可能性重視

3 単一レベル階層図からの同定

相互作用の指標 (λ や関数 g) や重要度を含む単一レベル階層図からファジィ測度を同定する方法を考察する [3]．重要度をどう捉えるのかによって同定されるファジィ測度は異なる．ここでは，[3] の 3 つの方法を示す．ただし，ファジィ測度割当関数 g を相互作用の指標として使う場合，3 番目の入力の数基準のみである．

単一レベル階層図の例として図 1 の 4 つのサブモデル M0, M1, M2, M3 があげられる．M0 は，$N = \{1,2,3\}$, $n = 3$, $w_1 = 0.1220, w_2 = 0.5584, w_3 = 0.3196$, $\lambda = 4.2$ であり，式 (12) より，$\xi = 0.3048$ である．

■シングルトンファジィ測度比率基準 シングルトンファジィ測度比率基準は，λ ファジィ測度によるファジィ測度の同定で最もよく用いられている方法で，シングルトンのファジィ測度値の比率を重要度の比率に一致

$$\mu(\{1\}) : \cdots : \mu(\{n\}) = w_1 : \cdots : w_n. \tag{14}$$

させ，λ ファジィ測度の条件 (式 (3),(4)) を満たすファジィ測度を求める．

■**Shapley** 基準 Shapley 値は，ファジィ測度の解釈において，重要度の指標としてもっともよく用いられる．そこで，ファジィ測度 μ の i 番目の要素の Shapley 値を $sh_i(\mu)$ としたとき，$sh_i(\mu) = w_i, i = 1, \ldots, n$ となるようなファジィ測度を求める．

■入力の数基準 入力の数基準では，重要度を非負の整数 w'_i で与える ($w'_1 : \ldots : w'_n = w_1 : \ldots : w_n$,

$n' = \sum w'_i$). n' 個の入力に等重みの重みを与える．このようにしたとき，元の N 上のファジィ測度を

$$\mu(A) = g(\sum_{i \in A} w_i),\ \forall A \subseteq N, \tag{15}$$

で与える．λ ファジィ測度の場合，次式となる．

$$\mu(A) = \phi_s(\sum_{i \in A} w_i),\ \forall A \subseteq N, \tag{16}$$

[2] では distorted probability で割当たファジィ測度をマルチ集合に対するファジィ測度として扱っている．

■OWA オペレータから g　OWA オペレータの順位への重要度 $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ から g を求めるには線形補間を利用することができる（ただし，$p_i > 0, \forall i$ とする）．

$$g(u) = \begin{cases} 0 \text{ if } u = 0 \\ p_k n(u - \dfrac{k-1}{n}) + \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} p_k \\ \quad \text{if } \frac{k-1}{n} < u \leqq \frac{k}{n}, k = 1, \ldots, n \end{cases} \tag{17}$$

■3 つの基準の比較　表 2 は,3 つの基準で同定した測度の比較である．相互作用指標 [6] は

$$\begin{aligned} I(\mu)(i, j \mid A) \equiv \mu(A \cup \{i, j\}) - \mu(A \cup \{i\}) \\ -\mu(A \cup \{j\} + \mu(A), A \subseteq N \setminus \{i, j\} \end{aligned} \tag{18}$$

で定義されている．最下行は，等重要度の場合であり，$\lambda = -0.99$ の場合の相互作用指標は -0.8182 である．3 つの基準を比較すると，Shapley 値基準は，重要度に重みを置いた基準，入力の数基準は，多少相互作用に重みを置いた基準であることが分かる．実際，λ が -1 や大きな値で，w_i にかたよりがあるとき，重要度，相互作用の両方を満足するファジィ測度を生成するのは困難である．評価基準の重要度を付けた OWA オペレータを比較したとき，どれも両方を満足するものではないことが指摘されている [7]．以下では，入力の数基準を用いる．

4　複数レベル階層図からの同定

図 1 のような複数レベル階層図があり，それぞれに相互作用，重要度が与えられている．サブモデルの番号に対応して，n_k, $N_k = \{(k, 1), \ldots, (k_{n_k})\}$, $w_{k,i}, \lambda_k, \mu_k$ と表記する．同定されたファジィ測度は，表 3 に示す．

n_0 を子のサブモデルの数, $N_0 = \{(0, 1), \ldots, (0, n_0)\}$, $g_k, k = 0, \ldots n_0$ をサブモデル k のファジィ測度割当関数とする．$N^* = \cup_{k=1}^{n_0} N_k$ とし，同定する全体のファジィ測度を μ^* とする．図 1 の場合 $N^* = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$ となる．

	圧倒的		うんと		かなり		少し		同じくらい		少し		かなり		うんと		圧倒的	
1位の基準					X													2位の基準
1位の基準										X								3位の基準
2位の基準															X			3位の基準

	圧倒的		うんと		かなり		少し		同じくらい		少し		かなり		うんと		圧倒的	
最上位の基準													X					最下位の基準

	圧倒的		うんと		かなり		少し		同じくらい		少し		かなり		うんと		圧倒的	
長所を重視													X					短所がないことを重視

図 3　順位間の一対比較

μ^* を求める基本的な考え方は，サブモデルの内のファジィ測度の値を親モデルの重要度に変換し，各サブモデルその重要度の和を使って全体のファジィ測度を求める．各サブモデルのファジィ測度を $\mu^*(N_k) = \mu_0(\{(0, k)\}), k = 1, \ldots, n_0$ で求める．単一のサブモデルのみに属する集合 A の $\mu^*(A)$ は

$$\mu^*(A) = \mu^*(N_k) \cdot g_k(\sum_{(k,i) \in A} w_{k,i}), \forall A \in N_k. \tag{19}$$

で求める．複数のサブモデルに属する集合の全体のファジィ測度の値は，それぞれのサブモデルの重要度 $w_{A,k}$ に変換する．$B_k = A \cap N_k$ とし，

$$w_{A,k} = g_0^{-1}(\mu^*(N_k) \cdot g_k(\sum_{(k,i) \in B_k} w_{k,i})) \tag{20}$$

その重要度を使い，求める．

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= g_0(\sum_{k=1}^{n_0} w_{A,k}) \qquad (21) \\ &= g_0(\sum_{k=1}^{n_0} (g_0^{-1}(g_0(w_{0,k}) \cdot g_k(\sum_{(k,i) \in (A \cap N_k)} w_{k,i})))) \end{aligned}$$

例えば，$A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$ の $\mu^*(A)$ は，$B_1 = A \cap N_1 = \{(1, 1), (1, 2)\}$, $B_2 = A \cap N_2 = \{(2, 1)\}$, $B_3 = A \cap N_3 = \{(3, 2)\}$ となり，式 (20) より

$$\begin{aligned} w_{A,1} &= \phi_{s_0}^{-1}(\phi_{s_0}(w_{0,1}) \cdot \phi_{s_1}(w_{1,1} + w_{1,2})) = 0.1220 \\ w_{A,2} &= \phi_{s_0}^{-1}(\phi_{s_0}(w_{0,2}) \cdot \phi_{s_2}(w_{2,1})) = 0.0210 \\ w_{A,3} &= \phi_{s_0}^{-1}(\phi_{s_0}(w_{0,3}) \cdot \phi_{s_3}(w_{3,2})) = 0.2214 \end{aligned}$$

となり，式 (21) より次のようになる．

$$\mu^*(A) = \phi_{s_0}(w_{A,1} + w_{A,2} + w_{A,3}) = 0.1961$$

4.1　相互作用の同定方法

階層図の重要度を同定するには，従来の AHP などで利用される評価基準間の一対比較などが利用できる．しかし，相互作用 (λ など) の同定は，容易ではない．そこで一対比較を使った 3 つの方法を提案する．

表 2　3 つの基準の比較 ($n=2,\ w_1=0.9, w_2=0.1, \lambda=-0.99, \xi=0.91$)

基準	同定したファジィ測度		シングルトン比率	Shapley 値		$u=\phi_s^{-1}(v)$		相互作用指標
	$\mu(\{1\})$	$\mu(\{2\})$	$\mu(\{1\}):\mu(\{2\})$	$sh_1(\mu)$	$sh_2(\mu)$	u_1	u_2	$I(\mu)(1,2\mid\emptyset)$
シングルトン比率基準	0.9977	0.1109	0.9000 : 0.1000	0.9434	0.0566	0.9479	0.0251	-0.1085
Shapley 値基準	0.9975	0.1975	0.8347 : 0.1653	0.9000	0.1000	0.9457	0.0472	-0.1951
入力の数基準	0.9941	0.3728	0.7273 : 0.2727	0.8107	0.1893	0.9000	0.1000	-0.3669
$w_1=w_2=0.5$	0.9091	0.9091	0.5000 : 0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	-0.8182

表 3　サブモデルの同定されたファジィ測度

		重要度			相互作用指標		同定されたファジィ測度 μ_k						
k	n_k	$w_{k,1}$	$w_{k,2}$	$w_{k,3}$	λ_k	ξ_k	$\{(k,1)\}$	$\{(k,2)\}$	$\{(k,3)\}$	$\{(k,1),(k,2)\}$	$\{(k,1),(k,3)\}$	$\{(k,2),(k,3)\}$	$\{(k,1),(k,2),(k,3)\}$
0	3	0.1220	0.5584	0.3196	4.2	0.3049	0.0530	0.3598	0.1652	0.4930	0.2551	0.3278	1.0000
1	2	0.2500	0.7500	–	3.0	0.3333	0.1958	0.1381	–	1.0000	–	–	–
2	3	0.1172	0.2684	0.6114	17.52	0.1886	0.0233	0.0679	0.2859	0.1188	0.4259	0.6937	1.0000
3	2	0.7500	0.2500	–	-0.98	0.8750	0.9657	0.6350	–	1.0000	–	–	–

■順位に対する重要度の一対比較　図 3 の上段のような順位に対する一対比較を行い，固有値法などで $\boldsymbol{p}$ を求め，式 (17) から g を求める．

■最上位と最下位の一対比較　図 3 の中段のような一対比較を行い，最上位への重要度 p_1 と最下位への重要度 p_n を求め，ϕ_s 変換の曲線に当てはめる．$\alpha = p_1/p_n$ として，$\alpha : 1 = \phi_s(\frac{1}{n}) : (\phi_s(1) - \phi_s(\frac{n-1}{n}))$ とすると，

$$\alpha = \frac{\phi_s(\frac{1}{n})}{1-\phi_s(\frac{n-1}{n})} \tag{22}$$

となる s を求め，$g(u)$ を $\phi_s(u)$ とする．また，「最上位の基準」と「最下位への基準」を表 1 のことばと解釈し，図 3 の最下段のような一対比較も可能である．

■親の基準による標準値の利用　図 3 のような 2 レベルの階層図は，商品選択などでは比較的よく使われるものである．最上位のレベルでは，「費用」，「機能」，「デザイン」という子の評価基準がある．図 3 の「費用」(M1) に関しては，「初期費用」と「運転費用」をあげている．費用に関しては，他の費用で補うことができる（補償できる）ので，加法的な相互作用を標準値とできる（例:$\lambda=3$）．「機能」(M2) に関しては，必要なものが挙げられているので，1 つの悪い点が他の良い点で補償できないと考え，優加法的な相互作用を標準値とできる（例:$\lambda=18$）．「デザイン」(M3) に関しては，中途半端に良い点が揃っていることより，1 つでも良い点があることがよりよいことが多いので，劣加法的な相互作用を標準値とできる（例:$\lambda=-0.98$）．M0 に関しては，すべてを満たす必要があるので「機能」ほどではないが，やや優加法的な相互作用を標準値とできる（例:$\lambda=4$）．

参考文献

[1] M. Sugeno, “Theory of fuzzy integrals and its applications,” Ph.D. dissertation, Tokyo Institute of Technology, Tokyo, 1974.

[2] T. Vicenç, K. Stokes, and Y. Narukawa, “An Extension of Fuzzy Measures to Multisets and Its Relation to Distorted Probabilities,” IEEE Trans. Fuzzy Syst., vol. 20, pp. 1032-1045, 2012.

[3] 高萩栄一郎，“重要度と λ による λ ファジィ測度の同定について” 日本知能情報ファジィ学会誌,vol.12, pp. 73-84, 2000.

[4] R. R. Yager, “Quantifier guided aggregation using OWA operators,” Int. J. Intell. Syst., vol. 11, pp. 49－ 73, 1996.

[5] Y. Tukamoto, “A Measure Theoretic Approach to Evaluation of Fuzzy Set Defined on Probability Space,” J. Fuzzy Math. , vol. 2, pp. 89-98, 1982.

[6] 室伏俊明，曽根田聖一 “ファジィ測度を読む技術 (III):相互作用指標,” in 第 *9* 回ファジィシステムシンポジウム., 札幌, 1993, pp. 693-696.

[7] C. Labreuche, “On Capacities Characterized by Two Weight Vectors,” J.P. Carvalho et al. (Eds.): IPMU 2016, Part I, CCIS 610, 2016, pp. 23-34.

連絡先
高萩　栄一郎
E-mail: takahagi@isc.senshu-u.ac.jp