一対比較行列からの最大緩和最小範囲算出による区間重要度推定法

Interval Weight Estimation Methods Based on Maximally Relaxed Minimum Range Calculation under a Given Pairwise Comparison Matrix

○ 乾口　雅弘　　　　印南　成章

○ Masahiro Inuiguchi　　　　Shigeaki Innan

大阪大学 大学院基礎工学研究科

Graduate School of Engineering Science, Osaka University

Abstract: An interval weight estimation method was proposed in Interval AHP under the idea that the inconsistency of pairwise comparison matrix comes from human vague evaluations. However, interval weights estimated by this method are often unbalanced. Some alternative estimation methods have been proposed and shown their better performances in numerical experiments. However, the best performed estimation methods include parameters requiring parameter tuning. In this paper, we propose parameter-free estimation methods based on maximally possibe minimum range calculations. The performances of the proposed methods are examined by numerical experiments.

1　はじめに

AHP における一対比較行列の不整合性が意思決定者の評価の曖昧さに起因するという観点から，各基準や代替案の重要度を区間で推定する区間 AHP[1] が提案されている．また，従来の区間 AHP では意思決定者の評価の曖昧さが十分に反映できないことから，評価の曖昧さを区間重要度により適切に反映させる β-緩和法や γ-緩和法などが提案されている [2, 3]．しかし，これらの方法ではパラメータ β, γ を適切に調整する必要がある．本研究では，与えられた一対比較行列から算出できる最大緩和最小範囲に基づいた区間重要度の推定法を提案する．この方法にはパラメータが存在しないので，パラメータ調整が不要となる．数値実験により，従来法や β-緩和法, γ-緩和法と提案法を比較し，提案法の有用性を検討する．

2　区間 AHP：重要度推定法とその緩和法

一対比較行列 $A = (a_{ij})$ から区間重要度を推定する区間 AHP[1] について述べる．項目 X_i の区間重要度を $W_i = [w_i^{\mathrm{L}}, w_i^{\mathrm{R}}]$, $i \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$ とすると，X_i の X_j に対する区間重要度比は $[w_i^{\mathrm{L}}/w_j^{\mathrm{R}}, w_i^{\mathrm{R}}/w_j^{\mathrm{L}}]$ になる．この区間内に一対比較値 a_{ij} が存在すると考えられるので，ϵ を微小な正数とすると，区間重要度の推定問題は次の制約条件の下で，目的関数 $d = \sum_{i \in N}(w_i^{\mathrm{R}} - w_i^{\mathrm{L}})$ を最小化する線形計画問題 (LP 問題) となる．

$$
\begin{array}{l}
a_{ij} w_j^{\mathrm{L}} \geq w_i^{\mathrm{R}},\ a_{ij}^{\mathrm{L}} w_j^{\mathrm{R}} \leq w_i^{\mathrm{L}},\ i, j \in N\ i < j \\
\displaystyle\sum_{i \in N \setminus j} w_i^{\mathrm{R}} + w_j^{\mathrm{L}} \geq 1,\ \sum_{i \in N \setminus j} w_i^{\mathrm{L}} + w_j^{\mathrm{R}} \leq 1,\ j \in N \\
w_i^{\mathrm{R}} \geq w_i^{\mathrm{L}} \geq \epsilon,\ j \in N
\end{array}
\quad (1)
$$

ここで，式 (1) の 2 行目は区間重要度の正規性条件 [1] であり，3 行目は $[w_i^{\mathrm{L}}, w_i^{\mathrm{R}}]$ が正になるための条件である．

この区間重要度推定法は評価の曖昧さを十分に反映しないことが多く，大きい重要度の区間の幅が小さくなりやすいという問題点がある．そこで，著者ら [3] は，幅総和最小化を緩和し区間重要度を広げる β-緩和法や重要度の大きさによる影響を修正した幅加重和最小化を緩和した γ-緩和法を提案した．幅加重和最小化における荷重は $\lambda_i = \left(\sqrt[n]{\prod_{j \in N} a_{ij}}\right)^{-1}$, $i \in N$ と定められる．式 (1) の下での d の最小値を $\hat{d}$，$d^\lambda = \sum_{i \in N} \lambda_i (w_i^{\mathrm{R}} - w_i^{\mathrm{L}})$ の最小値を $\hat{d}^\lambda$ とすると，d および d^λ の最小化を緩和すると，式 (1) と次の条件を満たす区間重要度 $[w_i^{\mathrm{L}}, w_i^{\mathrm{R}}]$, $i \in N$ を考えることになる．

$$
\left.
\begin{array}{ll}
\displaystyle\sum_{i \in N}(w_i^{\mathrm{R}} - w_i^{\mathrm{L}}) \leq \beta \hat{d}, & (\beta\text{-緩和法}) \\
\displaystyle\sum_{i \in N}\lambda_i(w_i^{\mathrm{R}} - w_i^{\mathrm{L}}) \leq \gamma \hat{d}^\lambda, & (\gamma\text{-緩和法})
\end{array}
\right\}
\quad (2)
$$

ただし，$\beta \geq 1, \gamma \geq 1$ である．推定区間重要度 W_k の上下限は次の二つの LP 問題の最適値で定められる．

$$
\left.
\begin{array}{l}
\text{minimize}\ \ w_k^{\mathrm{L}},\ \ \text{sub. to}\ \ (1), (2) \\
\text{maximize}\ \ w_k^{\mathrm{R}},\ \ \text{sub. to}\ \ (1), (2)
\end{array}
\right\}
\quad (3)
$$

この方法で定められる $W_k, k \in N$ は，式 (1) を満たす．

3　提案法:最大緩和最小範囲の計算

パラメータ β や γ を用いない区間重要度の推定法を提案する．提案法の直観的なアイデアは，幅の大きい区間重要度ほど式 (1) を満たしやすい．そこで，i 番目の区間重要度 W_i を求める際には，i 番目以外の区間重

要度 $W_j, j\in N\setminus i$ の幅をできるだけ小さくし，W_i の幅を大きくすることにより式 (1) の条件を満たすことを考える．このような W_i の包含の意味での最大解を $\hat{W}_i$ を推定値とする．これを各 i について繰り返す．

評価関数 d に対応するこの $\hat{W}_i, i\in N$ による推定法は次の手順で表される．

⟨1⟩ 各 $i\in N$ に対して，i 番目以外の区間重要度の幅の総和を最小化する次の LP 問題の最適値 $\hat{d}_{\bar{i}}$ を求める:

$$\text{minimize}\ \ d_{\bar{i}}=\sum_{j\in N\setminus i}(w_j^{\mathrm{R}}-w_j^{\mathrm{L}}),\ \ \text{sub. to (1)} \quad (4)$$

⟨2⟩ 各 $i\in N$ に対して，次の二つの LP 問題を解く:

$$\left.\begin{array}{l}\text{minimize}\ \ w_i^{\mathrm{L}},\ \ \text{sub. to}\ \ (1), d_{\bar{i}}\le\hat{d}_{\bar{i}}\\ \text{maximize}\ \ w_i^{\mathrm{R}},\ \ \text{sub. to}\ \ (1), d_{\bar{i}}\le\hat{d}_{\bar{i}}\end{array}\right\} \quad (5)$$

⟨3⟩ すべての $i\in N$ に対して得られた式 (5) の最適解の中で w_i^{R} および w_i^{L} それぞれの最大値，最小値を求め，i 番目の推定区間重要度の上下限とする．

この手順で式 (4) と (5) の LP 問題は 3 段階シンプレックス法および再最適化手法 (感度解析手法) により，シームレスに解くことができる．また，式 (5) の LP 問題の制約条件は $i\in N$ により異なるので，⟨3⟩ の処理が必要になる．評価関数 d^{λ} に対応するこの考え方に基づく推定法は，上の手順で $d_{\bar{i}}$ を $d_{\bar{i}}^{\lambda}=\sum_{j\in N\setminus i}\lambda_j(w_j^{\mathrm{R}}-w_j^{\mathrm{L}})$ に，$\hat{d}_{\bar{i}}$ を $\hat{d}_{\bar{i}}^{\lambda}$ に置き換えることにより得られる．ただし，$\hat{d}_{\bar{i}}^{\lambda}$ は式 (1) の下での $d_{\bar{i}}^{\lambda}$ の最小値である．

別の観点で、この解法を解釈してみよう．変数 α に関する l 個のデータ $s_i,\ i\in L=\{1,2,\ldots,l\}$ が与えられたとき，変数 α が取りうる値の範囲の最小限は，区間 $[\min_{i\in L}s_i\max_{i\in L}s_i]$ で与えられる．いま推定したい i 番目の重要度 (変数)ω_i に関しては $(n-1)$ 個のデータ $a_{ij},\ j\in L\setminus i$ が与えられるのみである．i 番目以外の各重要度 ω_j が常に一定値 w_j を取る場合は，$a_{ij}=\omega_i/\omega_j$ となることにより，ω_i の最小範囲を $[\min_{j\in N\setminus i}a_{ij}w_j,\max_{j\in N\setminus i}a_{ij}w_j]$ と与えることができる．与えられた一対比較行列 $A=(a_{ij})$ が整合していて，$w_j, j\in N\setminus i$ が正しく与えられる場合には，この最小範囲は実数値になる．さらに，ω_j の取りうる範囲が式 (1) を満たす $W_j=[w_j^{\mathrm{L}},w_j^{\mathrm{R}}],\ j\in N$ で与えられる場合には，ω_i の範囲の最小限は式 (1) の第 1 行の条件より，

$$\check{W}_i=\left[\min_{j\in N\setminus i}a_{ij}w_j^{\mathrm{R}},\max_{j\in N\setminus i}a_{ij}w_j^{\mathrm{L}}\right] \quad (6)$$

と与えられる．この区間の存在は式 (1) の第 1 行の条件より保証されるが，その範囲の最小性より式 (1) のすべての条件を満たすことも保証される．

いま，評価関数 $d_{\bar{i}}$ および $d_{\bar{i}}^{\lambda}$ それぞれを式 (1) の下で最小化すると，いずれの場合も，どちらかといえば $\check{W}_i$ の幅は小さくなることが多い．これらの最小化問題の最適解での $\check{W}_i$ をそれぞれ，ω_i の (単純) 最小範囲，加重最小範囲と呼ぶことにする．なお，LP 問題の最適解は唯一とは限らないので，ω_i の (単純) 最小範囲および加重最小範囲は複数存在することもある．$\check{W}_i$ のいずれかを包含し，式 (1) を満たす範囲で W_i の下限を最小化したものが式 (5) の左の LP 問題の最適値で，W_i の上限を最大化したものが式 (5) の右の LP 問題の最適値となる．これらの上下限で定められる区間 $\hat{W}_i^{-}$ は最小範囲を最大限に緩和したものとなる．そこで，$d_{\bar{i}}$ に対応するものを最大緩和 (単純) 最小範囲，$d_{\bar{i}}^{\lambda}$ に対応するものを最大緩和加重最小範囲と呼ぶ．$\hat{W}_i$ は ⟨3⟩ によりさらに緩和したものになるが，この提案法を最大緩和最小範囲法と呼ぶことにする．$d_{\bar{i}}$ と $d_{\bar{i}}^{\lambda}$ を区別する場合は，前者を最大緩和 (単純) 最小範囲法，後者を最大緩和加重最小範囲法と呼ぶ．

提案法に関して次の定理が得られる．

定理 1． LP 問題 (4), (5) には必ず実行可能解が存在し，最適値は有界となる．

定理 2． $\hat{W}_i,\ i\in N$ を提案法で得られた区間重要度とする．与えられた一対比較行列 A が整合しているとき，$\hat{W}_i, i\in N$ は通常の実数値の重要度となり，通常の AHP や従来法で求められる重要度と一致する．

定理 3． $\hat{W}_i, i\in N$ を提案法で得られた区間重要度とする．$\hat{W}_i, i\in N$ は制約条件 (1) を満足する．

評価基準 X_i による代替案 o_j の評価値が $u_i(o_j)$ と与えられると，区間重要度 $W_i, i\in N$ の下で，代替案 o_j, o_k 間の支配関係 $\succsim$ の成否は次式で定められる．

$$o_j\succsim o_k\leftrightarrow\min\left\{\sum_{i\in N}w_i(u_i(o_j)-u_i(o_k))\ \middle|\ \sum_{i\in N}w_i=1,\ w_i\in W_i, i\in N\right\}\ge 0 \quad (7)$$

この支配関係は比較可能性を満たさない．前順序である．

4 数値実験

4.1 区間重要度の推定精度の考察

$n=5$ とし，真の区間重要度 $T_i=[t_i^{\mathrm{L}},t_i^{\mathrm{R}}], i\in N$ を定め，区間 T_i, T_j それぞれから一様乱数で生成した値

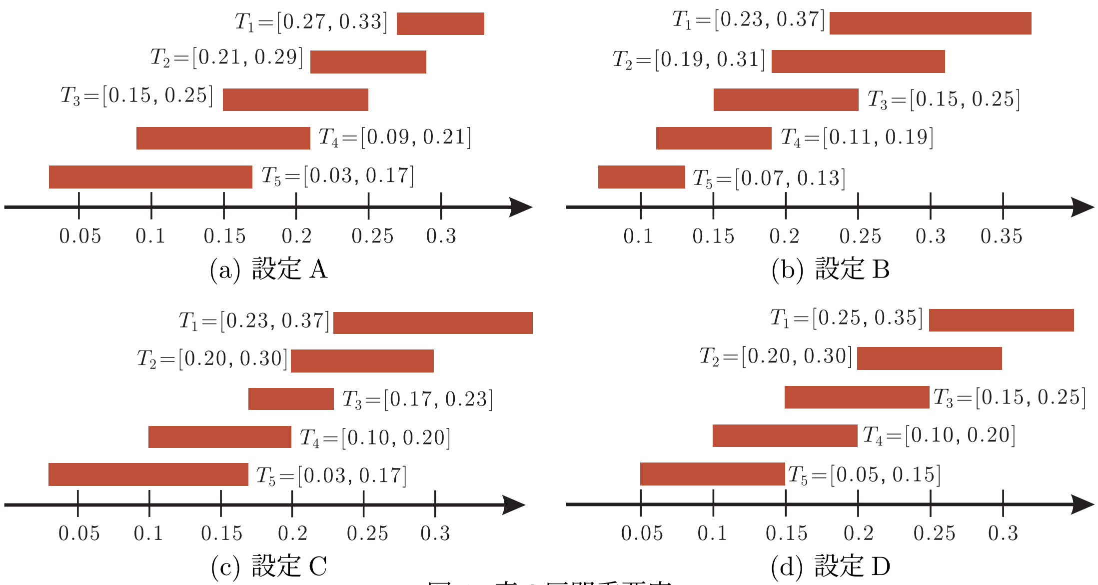

図 1: 真の区間重要度

表 1: 推定区間重要度の精度

設定 A

推定法	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	平均
従来法	0.104	0.240	0.423	0.400	0.457	0.325
β-緩和	0.354	0.499	0.490	0.639	0.707	0.538
γ-緩和	0.307	0.444	0.515	0.587	0.571	0.485
s-提案	0.372	0.426	0.538	0.579	0.623	0.508
w-提案	0.264	0.324	0.435	0.489	0.544	0.411

設定 B

推定法	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	平均
従来法	0.134	0.242	0.418	0.358	0.506	0.331
β-緩和	0.594	0.609	0.534	0.553	0.469	0.552
γ-緩和	0.618	0.578	0.561	0.551	0.590	0.580
s-提案	0.684	0.607	0.565	0.491	0.403	0.550
w-提案	0.603	0.532	0.516	0.432	0.347	0.486

設定 C

推定法	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	平均
従来法	0.102	0.240	0.298	0.391	0.477	0.302
β-緩和	0.584	0.567	0.322	0.585	0.694	0.551
γ-緩和	0.571	0.507	0.335	0.565	0.583	0.512
s-提案	0.664	0.517	0.335	0.521	0.626	0.533
w-提案	0.521	0.398	0.265	0.429	0.557	0.434

設定 D

推定法	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	平均
従来法	0.132	0.241	0.416	0.372	0.500	0.332
β-緩和	0.514	0.580	0.519	0.619	0.628	0.572
γ-緩和	0.489	0.529	0.535	0.584	0.617	0.550
s-提案	0.580	0.534	0.552	0.542	0.546	0.551
w-提案	0.460	0.427	0.478	0.471	0.471	0.461

の比を $\{1/9, 1/8, \ldots, 1/2, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$ に離散化して a_{ij} を定め，一対比較行列を作成する．各推定法により区間重要度 $W_i = [w_i^{\mathrm{L}}, w_i^{\mathrm{R}}]$，$i \in N$ を求め，推定精度を次の指標により評価する試行を 1,000 回繰り返した．

$$P_i = \frac{s(T_i \cap W_i)}{s(T_i) + s(W_i) - s(T_i \cap W_i)} \tag{8}$$

ただし，$s([x^{\mathrm{L}}, x^{\mathrm{R}}]) = x^{\mathrm{R}} - x^{\mathrm{L}}$，$s(\emptyset) = 0$ とする．$P_i \in [0, 1]$ で，1 に近いほど精度が高い．

T_i, $i \in N$ を図 1 のように与えた 4 設定で，予備実験により P_i が高くなるように調整した $\beta = 1.2$, $\gamma = 1.1$ を用いて実験を行った．その結果を表 1 に示す．表 1 で，'β-緩和', 'γ-緩和' はそれぞれ，β-緩和法，γ-緩和法を表し，'s-提案'，'w-提案' はそれぞれ，最大緩和単純最小範囲法，最大緩和加重最小範囲法を表す．各 w_i, $i \in N$ に関して僅か $(n-1)$ 個の w_i/w_j という変量の比の値しかデータが与えられないため，表 1 に示すように P_i が十分高くなる推定は困難であるものの，推定法によっては平均 0.5 以上の一致度が得られる．また，いずれの設定においても従来法では一致度が低く，ばらついていて，真の区間重要度に一致しているとは言い難い．β-緩和法や γ-緩和法は高い一致度を示している．また，二つの提案法はいずれも従来法よりも高い一致度を示し，β-緩和法や γ-緩和法に劣るものの，この状況下では悪い推定結果ではない．パラメータの調整が不要な面では，提案法は有用であると考えられる．

表 3: 推定区間重要度による支配関係評価性能

	設定 A			設定 B			設定 C			設定 D		
推定法	危険度	不一致	逆転度	危険度	不一致	逆転度	危険度	不一致	逆転度	危険度	不一致	逆転度
従来法	2.853	3.082	0.004	3.192	3.494	0.009	2.243	2.919	0.054	2.314	2.813	0.034
β-緩和	0.416	2.974	0	0.613	2.669	0	0.212	3.677	0.003	0.23	3.209	0.001
γ-緩和	0.696	2.597	0	0.78	2.149	0.003	0.291	2.926	0.006	0.343	2.563	0.002
s-提案	0.47	2.701	0	0.893	3.472	0.004	0.389	3.684	0.008	0.429	3.504	0.006
w-提案	0.297	3.755	0	0.563	4.086	0	0.219	4.631	0.005	0.256	4.41	0.004
AHP	5.023	5.023	0.023	5.009	5.009	0.009	4.099	4.099	0.099	4.041	4.041	0.041
r-AHP	2.425	2.839	0	2.206	2.603	0	1.698	2.537	0.005	1.585	2.325	0.001

表 2: 代替案の評価基準値

$u_i(o_j)$	評価基準				
代替案	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
o_1	0.25	0.30	0.10	0.15	0.20
o_2	0.20	0.25	0.30	0.10	0.15
o_3	0.15	0.20	0.25	0.30	0.10
o_4	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
o_5	0.30	0.10	0.15	0.20	0.25

4.2 支配関係の推定精度に関する考察

五つの代替案の評価基準値を表 2 のように与え，代替案間の支配関係の推定精度について調べる．真の区間重要度を用いれば，10 対中 4，5 対の代替案間で支配関係が成立する．先に生成した各一対比較行列に対して，10 の代替案対の支配関係の成否評価において，次のそれぞれの条件を満たす対の数を計測する．

危険: 真の評価で不明となるにもかかわらず，いずれかの強支配関係が推定される，あるいは，真の評価で得られる強支配関係が推定結果で逆転する．
不一致: 真の評価と推定結果が異なる．
逆転: 真の評価で得られる強支配関係が推定結果で逆転する．

真の評価で得られる強支配関係が推定結果で逆転すれば，まったく反対の結果が得られるので，極めて危険な推定である．真の評価で不明となるにもかかわらず，いずれかの強支配関係が得られれば，安全性の面で良い推定とはいえない．もちろん，真の評価と一致した推定結果が得られることが望ましい．逆転，危険，不一致は支配関係の推定に関するこれらの側面を反映している．一対比較行列ごとに計測される対の数を度数分布に表し，対の数の期待値を求めたものを表 3 に示す．これらの期待値を逆転度，危険度，不一致度 (表中では‘不一致’) と呼ぶ．これらの数は小さいほど良い．表 3 では，通常の AHP の最大固有値法で求めた場合を ‘AHP’ 行に示す．AHP では重要度は実数値を取り，支配関係は弱順序となる．そこで，総合評価値の差が r 以下である場合は支配関係が不明と判定する ‘r-AHP’ も考えた．なお，$r = 0.01$ と設定した．表 3 に示すように，通常の AHP では各指標の値が高く安全な評価とは言い難い．特に，逆転度が高く，誤った判断をする可能性がある．因みに，各設定での 1,000 の一対比較行列の整合度は，0.1 以下が最低 931 個，0.15 以下が最低 992 個あり，非常に高い確率でこの評価が採用され得る．r-AHP を用いることにより，かなり改善できるが，未だ危険度は高い．従来法は r-AHP より劣る結果となる．β-緩和法，γ-緩和法および二つの提案法は，不一致が大きくならない範囲で危険度をかなり抑えた推定結果を与えている．二つの提案法は，パラメータ調整した β-緩和法や γ-緩和法よりやや劣るが，パラメータ調整が不要な利点がある．

参考文献

[1] K. Sugihara, H. Tanaka, Interval evaluations in the analytic hierarchy process by possibilistic analysis, *Computational Intelligence*, 17(3) 567–579 (2001).

[2] M. Inuiguchi, S. Innan, Logarithmic conversion approach to the estimation of interval priority weights from a pairwise comparison matrix, *Proceedings of IUKM 2015*, 77–88 (2015).

[3] S. Innan, M. Inuiguchi, Modified interval weight estimation methods for interval AHP and their comparisons, *Proceedings of ISIS 2015*, 1410–1417 (2015).

連絡先

大阪大学大学院基礎工学研究科　乾口 雅弘

E-mail: `inuiguti@sys.es.osaka-u.ac.jp`